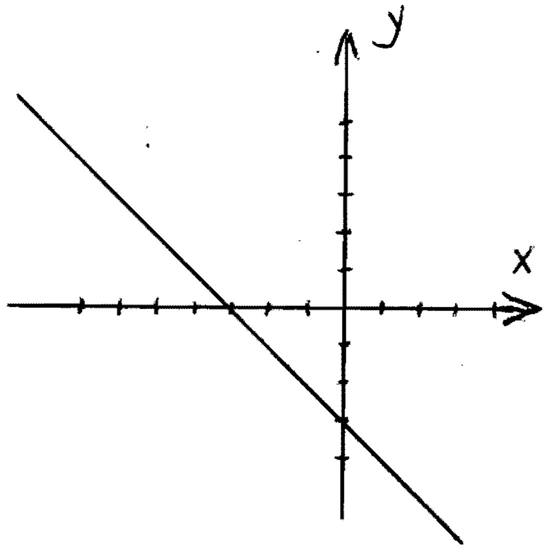
Lösningar till NP Ma2c vt2012

Del I

1) a) $y = 2x + 4$

b) T.ex.:



2) $\underbrace{(x+5)\cdot(x-5)}_{\text{Enligt konjugatregeln}} + 25 =$

$= x^2 - 25 + 25 = \underline{\underline{x^2}}$

3) a) $x \cdot (x+7) = 0$ Nollproduktmetoden

$\underline{\underline{x_1 = 0}}$

$\underline{\underline{x_2 = -7}}$

b) $\lg x = 3 \quad | 10^{\cdot}$

$10^{\lg x} = 10^3$

Tar ut varandra

$\underline{\underline{x = 1000}}$

c) $2^3 \cdot 2^x = 2^{2x}$

$2^{3+x} = 2^{2x}$

$3 + x = 2x \quad | -x$

$3 = 2x - x$

$3 = x$

$\underline{\underline{x = 3}}$

Svar: B.

4) A. $x^2 = 16$

$x_{1,2} = \pm 4$: reella

B. $x^2 + 6 = 0$

$x^2 = -6$

$\underline{\underline{x_{1,2} = \pm\sqrt{-6}}}$: icke-reella

C. $x^2 = 0$

$x = 0$: reell

D. $x^2 - \sqrt{5} = 0$

$x^2 = \sqrt{5}$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{\sqrt{5}}$: reella

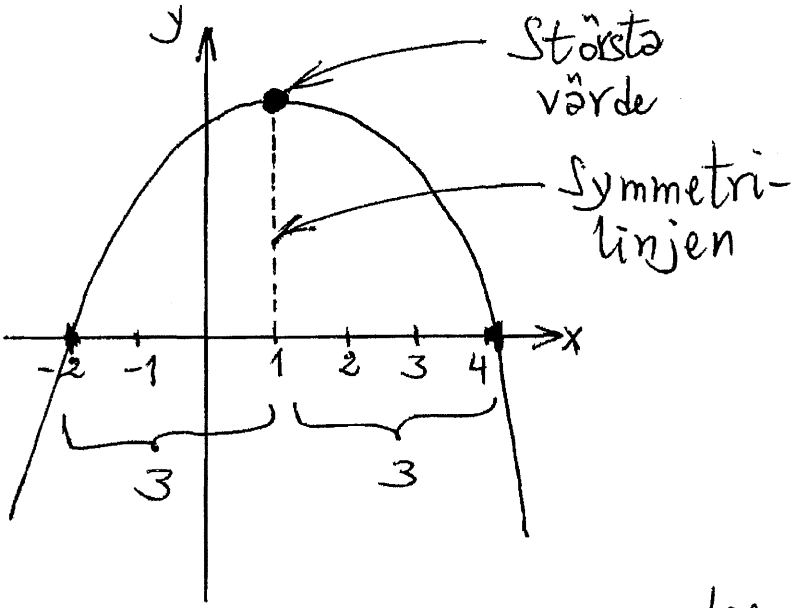
E. $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}}$: reella

5) Hastigheten $= \dfrac{\text{sträckan}}{\text{tiden } x} = 0{,}35$ km/min

Sträckan Anna har cyklat $= 0{,}35 \cdot x$

Kvar till skolan: $\underline{\underline{y = 7 - 0{,}35x}}$

6)



Symmetri

$\Downarrow$

Andra nollstället

vid $\underline{\underline{x = -2}}$

7) a) $2\lg x - 0{,}5 \cdot \lg x^2 = \left\{ \text{3:e } \text{log-lagen} \right\} = 2\lg x - 0{,}5 \cdot 2 \cdot \lg x =$

$= 2\lg x - 1 \cdot \lg x = \underline{\underline{\lg x}}$

b) $(xy - y)^2 \cdot y^{-2} = \dfrac{(xy-y)^2}{y^2} = \left(\dfrac{xy - y}{y}\right)^2 =$

$= \left(\dfrac{\cancel{y} \cdot (x-1)}{\cancel{y}}\right)^2 = \underline{\underline{(x-1)^2}}$

8) a) $g(2) = 6$

b) $-1 < x < 5$ därför att för x mellan -1 och 5 linjen $y = f(x)$ ligger under kurvan $y = g(x)$

c). Linjen $y = f(x)$ har lutningen $-1 \Longrightarrow$ Den sökta linjen måste vara parallell till den, dvs också ha lutningen -1.

8) c) (forts.) $y = -x + m$, där $m > 8$ för att inte skära $y = g(x)$

T. ex.: $\underline{\underline{y = -x + 10}}$

9) a) $V(t) = 10\,000 \cdot 0{,}60^{t} \Rightarrow$ Förändringsfaktorn $= 0{,}60$

Innebär minskning med $1 - 0{,}60 = 0{,}40 = \underline{\underline{40\ \%}}$

b) $\underline{\underline{V(t) = 10\,000 \cdot 0{,}60^{\frac{t}{12}}}}$

10) a) $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 12 \\ 3x + 2y = 1 \end{array}\right\}$ Vi subtraherar ekvationerna från varandra.

T. ex.:

$$\begin{array}{rl} 3x + 2y &= 12 \\ \ominus\quad 3x + 2y &= 1 \\ \hline 0 + 0 &= 12 - 1 \\ 0 &= 11 \end{array}$$

: Motsägelse

$\Downarrow$

Ekvationssystemet $\begin{array}{l} 3x + 2y = 12 \\ 3x + 2y = 1 \end{array}$ saknar lösning.

b) $3x + 2y = 12$

$ax + by = c$: Sätt in $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

$a \cdot 2 + b \cdot 3 = c$

$2a + 3b = c$: Välj a, b, c så att ekvationen uppfylls.

T. ex. $\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow c = 5$

Svar:

T. ex. $\underline{\underline{x + y = 5}}$

Del II

11)

$$\begin{cases} 2x - y = -9 & |\cdot 2 \\ 5x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 4x - 2y &= -18 \\ 5x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

$\oplus$

$$9x + 0 = -18$$

$$9x = -18 \quad |/9$$

$$\underline{\underline{x = -2}}$$

$$\Rightarrow 2\cdot(-2) - y = -9$$

$$-4 - y = -9$$

$$-4 + 9 = y$$

$$\underline{\underline{5 = y}}$$

12) a) $x^2 - 4x - 45 = 0$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+45} = 2 \pm \sqrt{49}$$

$$x_1 = 2 + 7 = \underline{\underline{9}}$$

$$x_2 = 2 - 7 = \underline{\underline{-5}}$$

b) $\sqrt{35-2x} = x \quad |(\cdot)^2$

$$35 - 2x = x^2$$

$$0 = x^2 + 2x - 35$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+35}$$

$$= -1 \pm \sqrt{36}$$

$$= -1 \pm 6$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -7$$

__Prövning__

$x_1 = 5$: $VL = \sqrt{35 - 2\cdot 5} = \sqrt{35-10} = \sqrt{25} = 5$

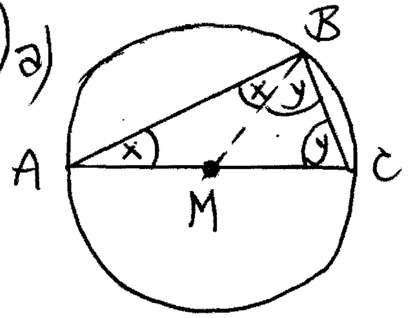
$HL = 5 = VL \Longrightarrow$ sann rot

$x_2 = -7$: $VL = \sqrt{35 - 2\cdot(-7)} = \sqrt{35+14} = \sqrt{49} = 7$

$HL = -7 \neq VL \Longrightarrow$ falsk rot

__Svar__ $\underline{x = 5}$ är ekvationens enda lösning.

13) a)



$AM = MB =$ cirkelns radie

$\Downarrow$

Triangeln ABM likbent

$\Downarrow$

Basvinklarna x lika stora.

b) $MB = MC =$ cirkeln radie

$\Downarrow$

Triangeln MBC likbent

$\Downarrow$

Basvinklarna y lika stora.

Vinkelsumman i triangeln ABC:

$2x + 2y = 180^\circ \quad |/2$

$\underline{\underline{x + y = 90^\circ}}$

14) $x^2 - (a-1)^2 = 0 \qquad | + (a-1)^2$

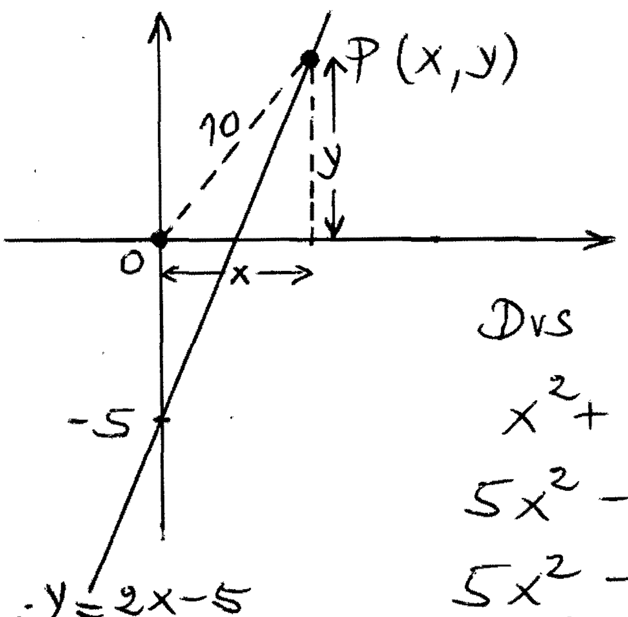
$x^2 = (a-1)^2 \quad | \sqrt{\cdot}$

$x_{1,2} = \pm(a-1)$

$x_1 = \underline{\underline{a-1}}$

$x_2 = -(a-1) = -a + 1 = \underline{\underline{1-a}}$

15)



Pythagoras:

$x^2 + y^2 = 10^2$

Men $y = 2x - 5$

Dvs $x^2 + (2x-5)^2 = 10^2$

$x^2 + 4x^2 - 20x + 25 = 100$

$5x^2 - 20x + 25 - 100 = 0$

$5x^2 - 20x - 75 = 0 \qquad |/5$

$x^2 - 4x - 15 = 0$

15) (forts.) $x^2-4x-15=0$

"Svara exakt" betyder: Låt $\sqrt{19}$ stå, inte i decimaler!

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+15}$$

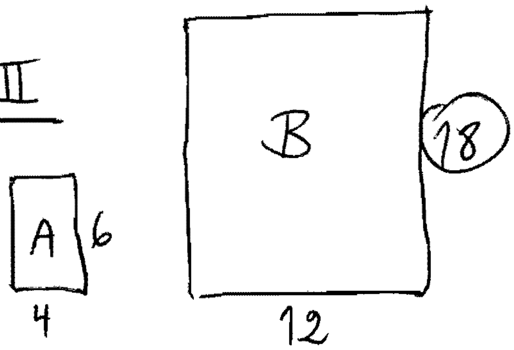
$x_1 = 2+\sqrt{19}$: positiv

$x_2 = 2-\sqrt{19}$: negativ

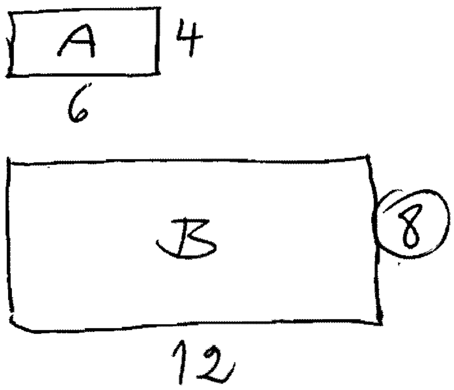
"P i första kvadranten" $\Longrightarrow$ P's x-koordinat är $x = 2+\sqrt{19}$

Del III

16)

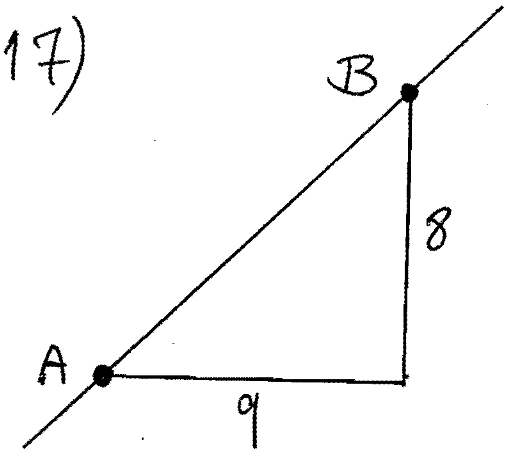


eller:

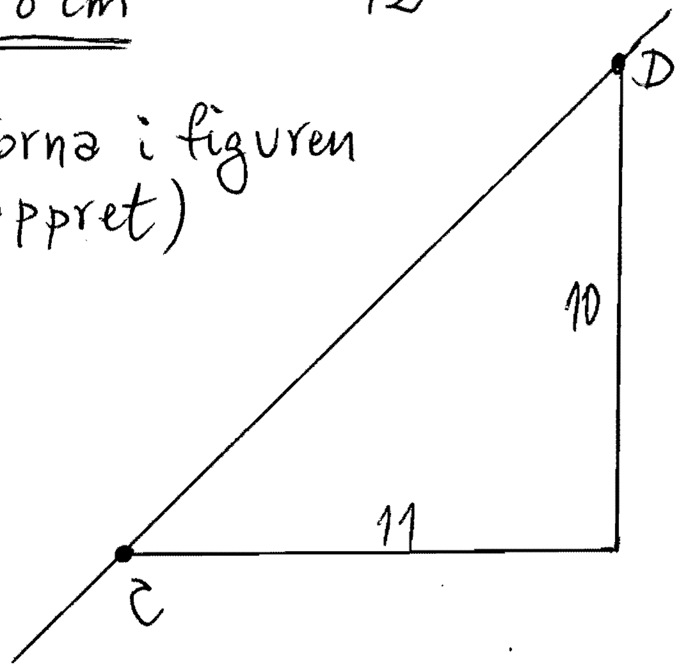


Svar: 18 cm eller 8 cm

17)



Räkna rutorna i figuren (på provpappret)



Lutningarna k:

$$k_{AB} = \frac{8}{9} = \frac{8\cdot 11}{9\cdot 11} = \frac{88}{99} \qquad k_{CD} = \frac{10}{11} = \frac{90}{99}$$

$k_{AB} \neq k_{CD} \Longrightarrow$ Linjerna är inte parallella.

18) Mellan kl 14.30 och kl 18.00 är det 3,5 timmar,

dvs $3{,}5 \cdot 60 = 210$ minuter.

Temperaturen efter 210 minuter:

$$T(210) = 16{,}5 \cdot 1{,}008^{210} = 87{,}9\,°C$$

$87{,}9\,°C > 77\,°C \Rightarrow$ Ja, steken blir klar i tid.

19) a) $t = 0$: Raketen påbörjar sin landning

$$h(0) = \frac{0^2}{90} - \frac{20 \cdot 0}{3} + 1000 = \underline{\underline{1000\ m}}$$

b) $h(300) = \dfrac{300^2}{90} - \dfrac{20 \cdot 300}{3} + 1000 = 0$

Efter 300 sekunder landar raketen på månen.

c) $g(0) = 1000 - \dfrac{10 \cdot 0}{3} = 1000\ m$

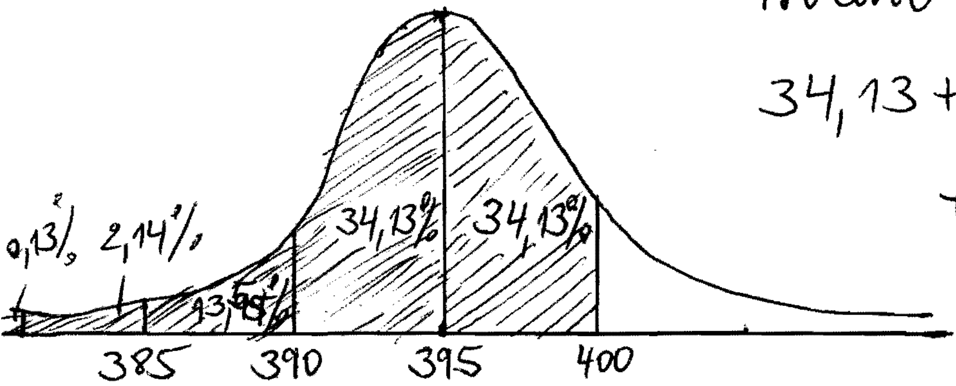
$g(300) = 1000 - \dfrac{10 \cdot 300}{3} = 0$

Även med Ilonas modell påbörjar raketen sin landning i 1000 m höjd och landar på månen efter 300 sek.

d) Hugos modell $h(t)$ börjar i hög fart och sänker hastigheten sedan. Den är en 2:a gradsfunktion. Ilonas modell $g(t)$ har samma hastighet hela tiden. Den är en (linjär) 1:a gradsfunktion.

20) a) Medelvärdet = 395

Standardavvikelsen = 5



Procent < 400 g:

$34{,}13 + 34{,}13 + 13{,}59 +$
$+ 2{,}14 + 0{,}13 = 84{,}12$

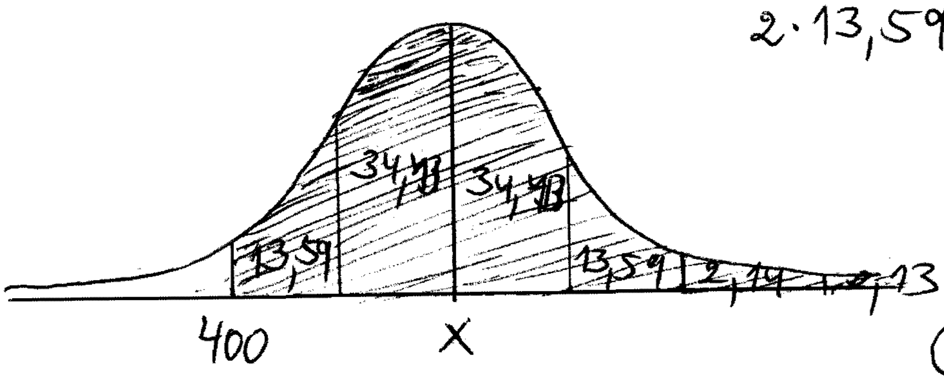
Svar:

84,12 % av burkarna förväntas innehålla < 400 g.

b) X = Nytt medelvärde

Standardavvikelsen = 5

97 % ska ha mer än 400g



$2 \cdot 13{,}59 + 2 \cdot 34{,}13 + 2{,}14 +$
$+ 0{,}13 = 97{,}71$

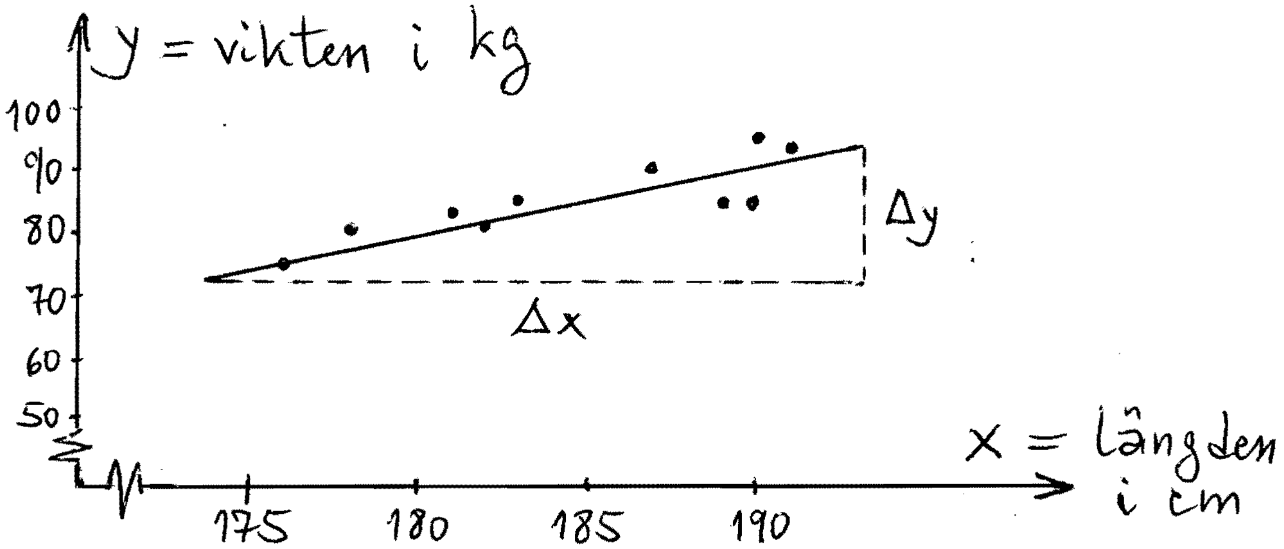
För att det grå området ska vara minst 97 % av burkarna, måste 400g vara på två standardavvikelser från medelvärdet.

Därför $X = 400\,g + 2 \cdot 5\,g = \underline{\underline{410\,g}}$

21) Tre på varandra följande heltal: $n-1$, n, $n+1$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Median} = n \\ \text{Medelvärdet} = \dfrac{n-1+n+n+1}{3} = \dfrac{3n}{3} = n \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Median = Medelvärdet $\Rightarrow$ Alice har rätt.

22) 

a) Linjärt samband: $y = k \cdot x + m$

I diagrammet kan avläsas: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx 1$

$\Downarrow$

Från tabellen, t.ex. Lennart:

$$y = x + m$$
$$74 = 176 + m$$
$$74 - 176 = m$$
$$-102 = m$$

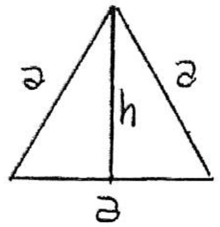
Andra data från tabellen ger andra värden på m. Men alla ligger kring −100. Därför:

$$\underline{\underline{y = x - 100}}$$

b) Riktningskoefficienten (lutningen) är ca. 1, dvs en ökning av längden på 1 cm innebär en ökning av vikten på 1 kg.

23)

a)

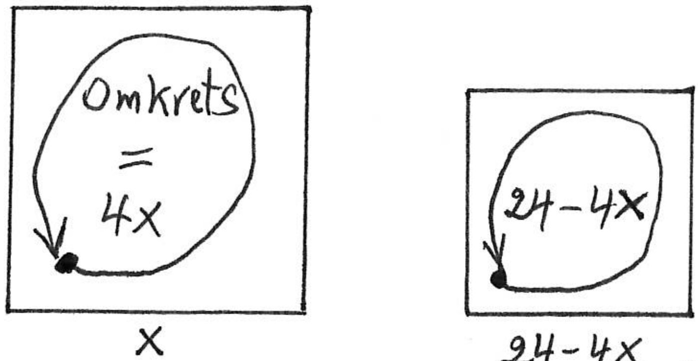


$$3a = 24$$
$$a = \frac{24}{3}$$
$$a = 8$$

$$h^2 + 4^2 = 8^2$$
$$h^2 + 16 = 64$$
$$h^2 = 64 - 16$$
$$h^2 = 48$$
$$h = 6{,}93$$

$$A = \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} = \underline{\underline{27{,}71}}$$

b)



A = Båda kvadraternas area.

$$\frac{24-4x}{4} = 6 - x$$

$$A = x^2 + (6-x)^2 = 17 \qquad \text{: Vi antar}$$
$$x^2 + 36 - 12x + x^2 = 17$$
$$2x^2 - 12x + 36 = 17 \qquad | -17$$
$$2x^2 - 12x + 19 = 0 \qquad | /2$$
$$x^2 - 6x + 9{,}5 = 0$$

Symmetrilinjen: $x=3$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{\underbrace{9 - 9{,}5}_{<0}}$$

Ekvationen saknar reella lösningar $\Leftarrow$

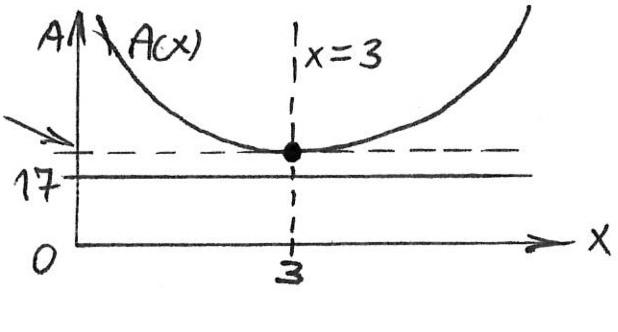
$\Downarrow$

Båda kvadraternas area <u>kan inte bli 17 m²</u>.

<u>Överkurs:</u> $A(x) = x^2 + (6-x)^2$

$$A(3) = 3^2 + (6-3)^2 = 18$$

Först för $A > 18$ m² finns lösningar x.



Tillägg till NP Ma2c vt12

Uppg 23

23

b) Snöret: 0 ——— 24

x $\quad$ $6-x$ $\Rightarrow$ $0 \le x \le 6$

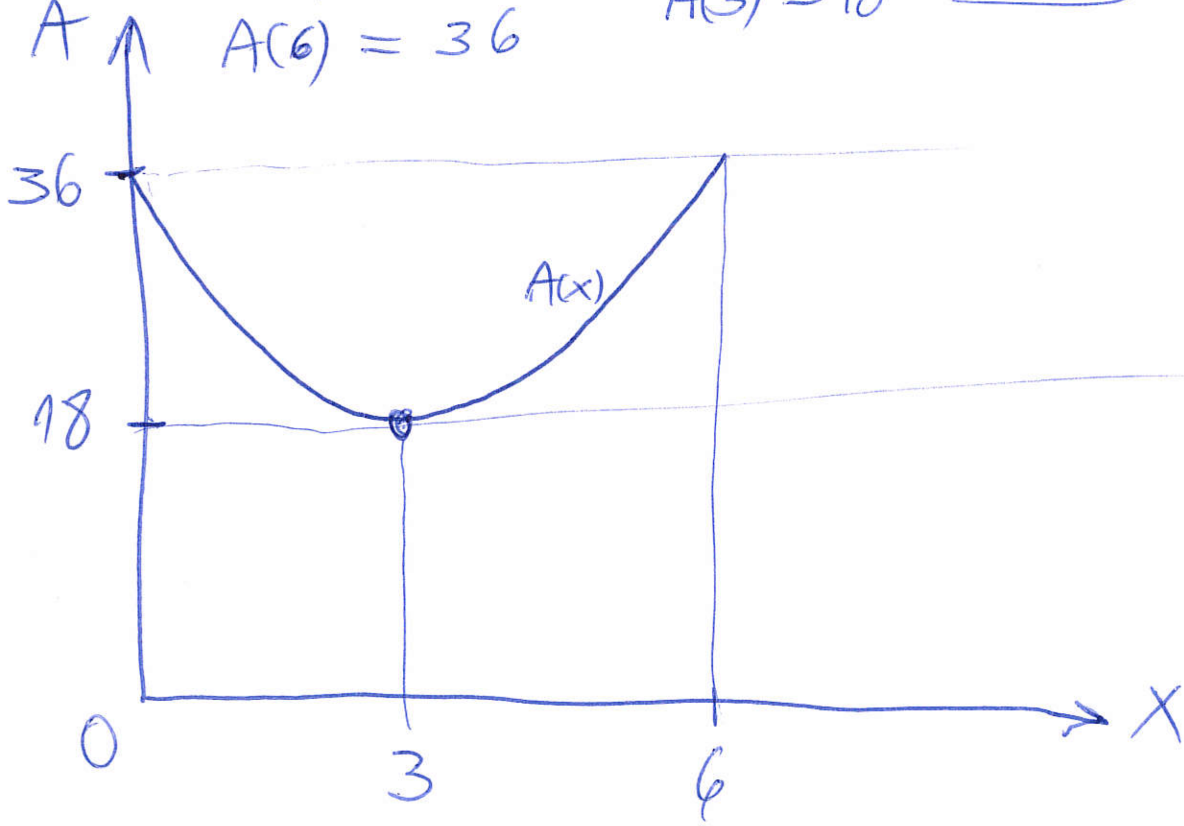
$$\boxed{A(x) = x^2 + (6-x)^2}$$

$A(0) = 36$

$A(6) = 36$

$A(3) = 18$

$18 \le \boxed{A(x) \le 36}$



$0 \le x \le 6$	Definitionsmängd
$18 \le A(x) \le 36$	Värdemängd